

BAB III LANDASAN TEORI

3.1. Prinsip Resonansi pada Beban Dinamik Harmonik.

Untuk mengetahui efek frekuensi beban terhadap respon struktur secara sederhana dapat diketahui dengan memperhatikan solusi persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*). Apabila suatu struktur dengan derajat kebebasan tunggal SDOF (*Single Degree of Freedom*) dibebani dengan beban harmonik $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$, maka untuk struktur yang dianggap tidak mempunyai redaman, simpangan struktur $y(t)$ dapat dihitung dengan persamaan 2, dengan k adalah kekakuan struktur, P_0 adalah amplitudo beban, ω adalah frekuensi sudut struktur, Ω adalah frekuensi sudut, dan r adalah rasio frekuensi.

$$y(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-r^2} \{ \sin(\Omega t) - r \sin(\omega t) \}, \quad r = \frac{\Omega}{\omega} \dots \dots \dots (2)$$

Apabila nilai r pada persamaan 2 sama dengan 1, maka peristiwa resonansi akan terjadi, yaitu simpangan struktur menjadi tak terhingga. Sedangkan untuk struktur yang mempunyai redaman, simpangan horisontal struktur dapat dihitung dengan persamaan 3 dan persamaan 4.

$$y(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-r^2)(2\xi r)^2} \{ e^{-\alpha t} [\cos(\omega_d t) + C \sin(\omega_d t)] + (1-r^2) \sin(\Omega t) - 2\xi r \cos(\omega t) \} \dots \dots (3)$$

$$C = \frac{r \{ 2\xi^2 - (1-r^2) \}}{(1-\xi^2)^{0.5}} \dots \dots \dots (4)$$

dengan $\omega_d =$ adalah *damped frequency*.

3.2. Massa dan Kekakuan Lapisan Tanah.

Jika suatu profil tanah terdiri dari beberapa lapis, maka lapisan tanah tersebut dapat dimodel sebagai suatu massa tergumpal (*lump mass*) seperti ditunjukkan pada Gambar 3.1. Dari Gambar 3.1 tersebut massa ($m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$) dan kekakuan lapisan tanah dapat dihitung dengan rumus pendekatan seperti ditunjukkan pada Persamaan 5, 6 dan 7 (Idriss dan Seed, 1968 dalam Das, 1993).

$$m_1 = \frac{\gamma_1 h_1}{g} \dots \dots \dots (5)$$

$$m_i = \frac{\gamma_{i-1} h_{i-1} + \gamma_i h_i}{g} \quad \text{dengan } i = 1, 2, \dots, n. \dots \dots \dots (6)$$

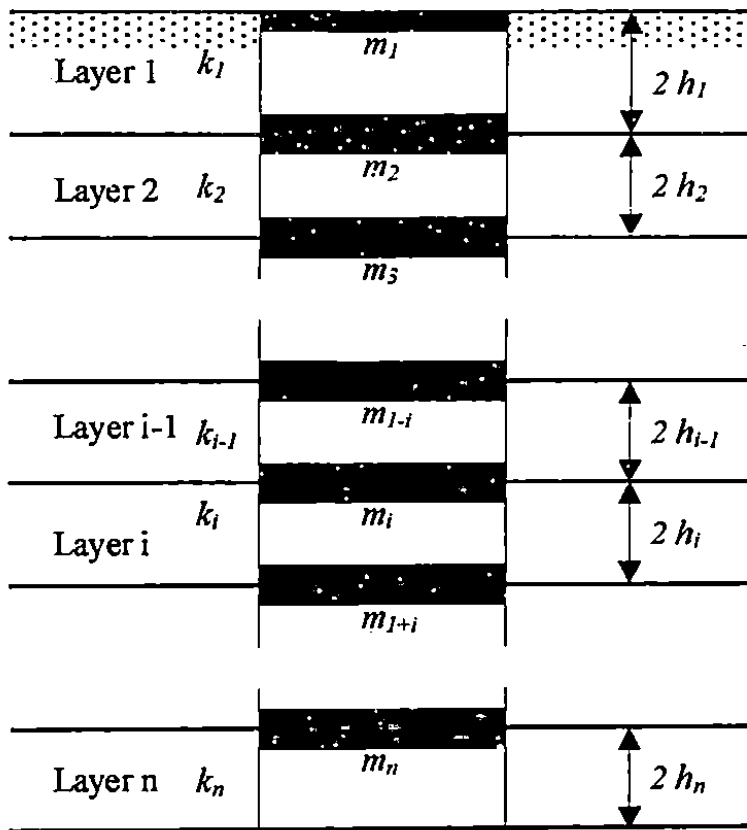
$$k_i = \frac{G}{2h_i} \quad \text{dengan } i = 1, 2, \dots, n. \dots \dots \dots (7)$$

dimana: m_i = massa tergumpal yang terletak pada lapisan tanah ke-i.

k_i = kekakuan yang menghubungkan massa m_i dan m_{i+1} .

γ_i = berat satuan tanah pada lapisan ke-i.

h_i = setengah kedalaman pada lapisan tanah ke-i.



Gambar 3.1. Massa tergumpal pada lapisan horizontal.

3.3. Karakteristik Statik dan Dinamik.

Untuk mempelajari pengaruh kondisi tanah lokal terhadap gerakan tanah (*ground*

response) terhadap gempa bumi, maka perlu diketahui karakteristik statik dan dinamik lapisan tanah

tempat gelombang gempa merambat. Semua karakter tersebut akan berpengaruh pada gerakan tanah dan respon struktur/bangunan di atas permukaan tanah.

Karakteristik statik tanah pasir (*cohesionless soils*) secara umum dapat dibedakan menjadi tanah berpasir (kohesi $c = 0$) dan tanah lempung murni ($\phi = 0$). Karena pasir tidak mempunyai kohesi, maka pada saat terjadi gempa, butir-butir pasir dapat memadat ataupun bahkan mengembang dengan mudah seperti pada *liquefaction*, yaitu peristiwa hilangnya gesekan antar butir akibat meningkatnya tekanan air pori sebagai akibat guncangan gempa.

Karena tanah pasir bersifat kasar maka tahanan geser tanah pasir bertambah sehingga akan menambah pula sudut gesek dalamnya. Faktor-faktor yang mempengaruhi kuat geser tanah pasir adalah :

- a) Ukuran butir.
- b) Air yang terdapat di dalam butirannya.
- c) Kekerasan butirannya.
- d) Angka pori atau kekakuan relatifnya.
- e) Distribusi ukuran butirnya.
- f) Bentuk butirannya.

Dari faktor-faktor yang mempengaruhi kuat geser tanah pasir di atas, yang paling besar pengaruhnya adalah nilai angka pori, karena angka pori akan berpengaruh terhadap kerapatannya. Pada pengujian geser langsung maupun triaksial, bila angka pori rendah atau kerapatan relatif tinggi, maka nilai kuat geser akan tinggi pula. Jika dua macam tanah pasir mempunyai kerapatan relatif sama, tetapi gradasinya berlainan, maka pasir yang mempunyai gradasi lebih baik akan mempunyai sudut gesek dalam yang lebih besar. Ukuran butiran untuk pasir dengan angka pori yang sama, tidak banyak berpengaruh pada sudut gesek dalamnya. Jadi pasir halus dan pasir kasar pada angka pori yang sama akan mempunyai sudut gesek yang sama.

Karakteristik statik tanah lempung (*cohesion soils*) umumnya terdiri atas butir-butir yang sangat halus dari jenis mineral yang mempunyai nilai kohesi. Sifat kohesi ini adalah suatu nilai interaksi antara mineral-mineral penyusun lempung dengan air. Dengan adanya interaksi tersebut maka akan terjadi lekatan/rekatan antara butir yang satu dengan

butir yang lain. Peristiwa inilah yang menyebabkan lempung mempunyai nilai kohesi tertentu.

Karakteristik dinamik yang berupa respon tanah akibat beban dinamik yang dilakukan pada percobaan di laboratorium adalah untuk mensimulasi perilaku elemen tanah pada kedalaman tertentu akibat getaran gelombang gempa. Simulasi yang dilakukan umumnya menganggap bahwa gelombang geser merambat secara vertikal sehingga gelombang geser tersebut akan mengakibatkan suatu elemen tanah berubah-ubah bentuk akibat adanya gaya geser bolak balik.

3.4. Modulus Geser Tanah.

Nilai modulus geser merupakan perbandingan tegangan geser dengan regangan geser tanah. Modulus geser tanah (G) dan damping ratio tanah (D) dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu : jenis tanah, tekanan terkekang, besarnya regangan geser tanah, derajat kejenuhan, dan besarnya tegangan dinamik (Hardin, dkk., 1968), yang besarnya dapat dirumuskan melalui suatu persamaan 8 untuk tanah lempung.

$$G_{max} = 331 OCR^k \frac{(2,973-e)^2}{(1+e)} \bar{\sigma}_o^{-0,5} \dots \dots \dots (8)$$

Nilai $\bar{\sigma}_o$ dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan 9, dimana $\bar{\sigma}_1$ adalah tegangan vertikal, sedangkan $\bar{\sigma}_2$ dan $\bar{\sigma}_3$ diperoleh dengan Persamaan 10.

$$\bar{\sigma}_o = \frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)}{3} \dots \dots \dots (9)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = K_o \cdot \bar{\sigma}_1 \dots \dots \dots (10)$$

dengan K_o adalah koefisien tekanan tanah horisontal saat diam dapat diperoleh dengan Persamaan 11 dan persamaan 12 untuk lempung *normally consolidated* (Brooker dan Ireland, 1965).

$$K_o = 0,40 + 0,007 (PI) \quad \text{untuk } 0 \leq PI \leq 40 \% \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$K_o = 0,68 + 0,001 (PI-40) \quad \text{untuk } 40 \% \leq PI \leq 80 \% \quad \dots \dots \dots (12)$$

Sedangkan untuk lempung pada kondisi tanpa pembebanan (*unloading*) dan pembebanan (*preloading*) nilai K_o diberikan seperti persamaan 14 dengan nilai h untuk PI

Nilai K_o untuk tanah pasir dapat menggunakan Persamaan 13, dimana ϕ adalah nilai sudut gesek pasir (Jaky, 1948).

$$K_o = 1 - \sin \phi' \quad \dots \dots \dots (13)$$

Sedangkan untuk pasir kondisi *over consolidated* korelasi antara K_o dan nilai banding *over consolidated* (OCR), dinyatakan dengan Persamaan 14, dimana h adalah nilai eksponen empiris yang berkisar antara 0,4 sampai dengan 0,5 dan bahkan dapat mencapai 0,6 untuk pasir sangat padat (Alpan, 1967).

$$K_o' = K_o (OCR)^h \quad \dots \dots \dots (14)$$

Nilai modulus geser maksimum untuk tanah pasir (kg/cm^2) dapat diperoleh dengan Persamaan 15a atau 15b.

$$G_{max} = 700 \frac{(2,17 - e)^2}{(1 + e)} \sigma_o^{-0,5} \text{ untuk pasir berbutir halus} \quad \dots \dots \dots (15a)$$

$$G_{max} = 326 \frac{(2,97 - e)^2}{(1 + e)} \sigma_o^{-0,5} \text{ untuk pasir berbutir tajam} \quad \dots \dots \dots (15b)$$

dimana : e = angka pori.

σ_o = tegangan kekang efektif.

OCR = Over Consolidasi Ratio.

k = koefisien tanah, yang dapat diperoleh dari Tabel 3.1.

Nilai modulus geser G dapat dicari dengan Persamaan 16 (Vucetik dan Dobry, 1991 dalam Pujianto, 2003), dimana nilai γ_h dan α dapat diambil dari Tabel 3.1.

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1 + \alpha \left\{ \frac{\gamma_a^\alpha}{\gamma_h} \right\}} \quad \dots \dots \dots (16)$$

Tabel 3.1. Nilai PI , k , γ_h dan α

Indeks Plastisitas	k	γ_h	α
0	0	0,04	1,00
20	0,18	0,07	1,00
40	0,30	0,12	0,95
60	0,41	0,20	0,87
80	0,48	0,38	0,75
≥ 100	0,50	1,10	0,97

3.5. Damping Ratio.

Damping ratio akan meningkat pada regangan geser yang semakin besar dan pada tanah yang indeks plastisitasnya semakin kecil. Hal ini berarti bahwa tanah pasir mempunyai kemampuan meredam energi gelombang gempa yang lebih besar dari pada tanah lempung.

Nilai damping ratio (*D*) untuk beberapa jenis tanah disajikan dengan persamaan 17 s/d persamaan 20, sesuai dengan jenis tanahnya.

$$D_{max} = 33 - 1,5 (\log N) \quad \text{Untuk pasir kering bersih} \dots (17)$$

$$D_{max} = 28 - 1,5 (\log N) \quad \text{Untuk pasir basah bersih} \dots (18)$$

$$D_{max} = 26 - 4 \sigma_o^{0,5} + 0,7 f^{0,5} - 1,5 (\log N) \quad \text{Untuk lanau} \dots (19)$$

$$D_{max} = 31 - (3 + 0,03 f) \sigma_o^{0,5} + 1,5 f^{0,5} - 1,5 (\log N) \quad \text{Untuk Lempung/kohesif} \dots (20)$$

dimana : $f = 1/T =$ frekuensi natural (putaran per detik).

$N =$ Number equivalent of cycle at $0,65 \tau_{max}$, didapat dari persamaan 21 (Seed, 1975 dalam Pujianto, 2003).

$$N = 0,0387 e^{0,7876M} \dots (21)$$

dimana :

$M =$ Magnitude gempa (dalam satuan Richter).

$e =$ Nilai eksponensial.

3.6. Hubungan antara Damping Ratio dan Modulus Geser.

Hubungan antara Damping Ratio dan Modulus Geser dinyatakan dengan Persamaan 22.

$$D = D_{max} \left(1 - \frac{G}{G_{max}} \right) \dots (22)$$

3.7. Regangan Geser Tanah.

Nilai regangan geser tanah yang terjadi akibat gempa dapat diestimasi melalui analisis elemen hingga tiga dimensi Tokida, Tamura, Aizawa (1991). Kemudian dari

regangan geser dengan memperhitungkan besarnya gempa dan jarak episenter dari data rekaman gempa, dinyatakan dengan Persamaan 23.

$$\gamma = 0,894 \times 10^{0,548M} \times (\Delta + 30)^{-0,774} \times 10^{-6} \dots\dots\dots(23)$$

dimana :

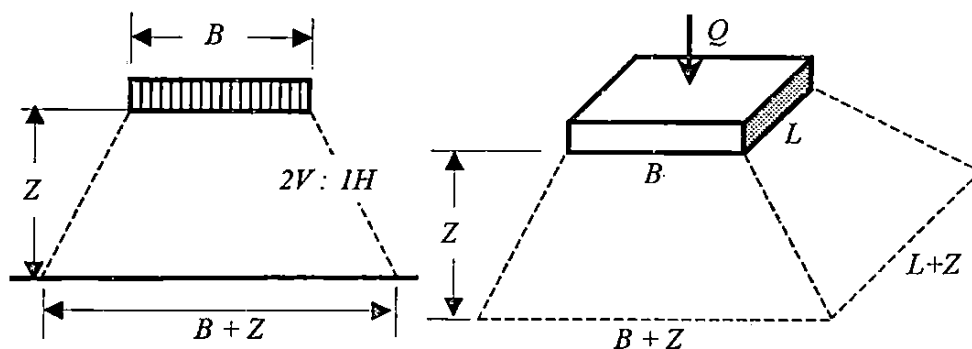
γ = regangan geser tanah.

M = magnitudo gempa (dalam satuan Richter).

Δ = jarak episenter.

3.8. Metode Penyebaran Beban 2V : 1H.

Apabila diatas lapisan tanah terdapat beban bangunan maka akan menambah besarnya tegangan yang terjadi. Berbagai macam cara telah digunakan untuk menghitung pengaruh tegangan akibat beban fondasi. Salah satu cara pendekatan yang sangat sederhana untuk menghitung tambahan tegangan beban di permukaan diberikan oleh Boussinesq (1885), yaitu dengan cara membuat garis penyebaran beban 2V : 1H (2 vertikal dibanding 1 horisontal). Dalam cara ini dianggap beban pondasi Q didukung oleh piramid yang mempunyai kemiringan sisi 2V : 1H, seperti terlihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Penyebaran beban 2V : 1H (Boussinesq, 1885).

Cara pendekatan ini, menghasilkan nilai tambahan tegangan vertikal yang dinyatakan dalam Persamaan 24 dan 25.

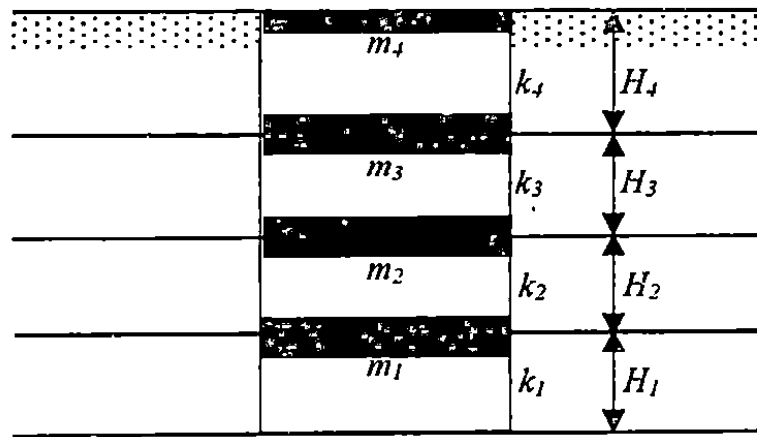
$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{(L + Z)(B + Z)} \dots\dots\dots(24)$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{qLB}{(L+Z)(B+Z)} \dots\dots\dots (25)$$

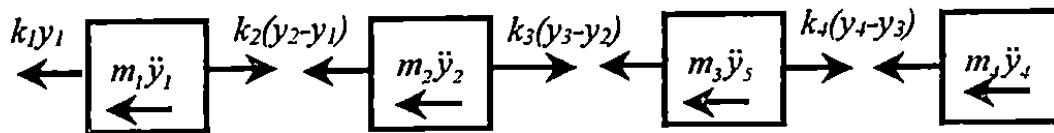
dengan :

- $\Delta\sigma_z$ = tambahan tegangan vertikal.
- Q = beban total pada dasar pondasi.
- q = beban terbagi rata pada dasar pondasi.
- L = panjang area pondasi.
- B = lebar area pondasi.
- Z = kedalaman yang ditinjau.

Dalam menghitung besarnya tegangan total yang terjadi dalam tanah, setelah tegangan vertikal yang diperoleh, hasilnya masih harus ditambahkan dengan tegangan akibat beban tanah di kedalaman yang ditinjau (yaitu tekanan *overberden*). Hal ini perlu dimengerti, karena pada cara elastis dianggap bahwa tanah yang sedang mengalami pembebanan tidak mempunyai berat.



a. Model Struktur Tanah



b. Diagram kesetimbangan

3.9. Persamaan Differensial Gerakan MDOF.

Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan dipakai prinsip keseimbangan dinamik pada suatu massa yang ditinjau. Untuk memperoleh persamaan tersebut maka diambil model struktur MDOF (*Multi Degree of Freedom*) seperti Gambar 3.3. Dengan memperhatikan diagram kesetimbangan (*free body diagram*) gambar 3.3b. maka didapat persamaan differensial simultan gerakan massa, sebagaimana ditunjukkan dalam Persamaan 26 s/d Persamaan 29.

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) = 0 \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) + k_3 (y_3 - y_2) = 0 \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - k_4 (y_4 - y_3) = 0 \quad \dots \dots \dots (28)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 + k_4 (y_4 - y_3) = 0 \quad \dots \dots \dots (29)$$

Persamaan 26 s/d Persamaan 29 dapat disusun secara matematis menjadi Persamaan 30 s/d Persamaan 33.

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (30)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 = 0 \quad \dots \dots \dots (31)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 - k_3 y_2 + (k_3 + k_4) y_3 - k_4 y_4 = 0 \quad \dots \dots \dots (32)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 - k_4 y_3 - k_4 y_4 = 0 \quad \dots \dots \dots (33)$$

Persamaan 30 s/d Persamaan 33 dapat ditulis dalam bentuk matriks, menjadi Persamaan 34.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (34)$$

dimana :

m = massa tiap lapis tanah (kg dt²/cm).

k = kekakuan tiap lapis tanah (kg/cm).

y = simpangan (cm).

\ddot{y} = percepatan tanah (cm/dt²).

3.10. Persamaan *Eigeproblem* dan Mode Shape.

Persamaan *eigenproblem* didapat dari Persamaan 34, dapat ditulis menjadi Persamaan 35.

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\omega^2 m_1 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-\omega^2 m_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3+k_4)-\omega^2 m_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4-\omega^2 m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (35)$$

dimana :

ϕ = mode shape lapisan tanah.

ω = frekwensi sudut (rad/dt).

Misalkan : $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, dan $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, maka Persamaan 35 akan menjadi Persamaan 36 dan dapat ditulis menjadi persamaan 37.

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 m & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k-\omega^2 m & -k \\ 0 & 0 & -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (36)$$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{\omega^2 m}{k} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\frac{\omega^2 m}{k} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\frac{\omega^2 m}{k} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\frac{\omega^2 m}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (37)$$

jika $2-\frac{\omega^2 m}{k} = \lambda$, maka Persamaan 37 akan menjadi Persamaan 38.

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (38)$$

Persamaan 38 jika disederhanakan menjadi persamaan aljabar biasa, akan diperoleh Persamaan 39 s/d Persamaan 42.

$$(2-\lambda) \phi_1 - \phi_2 = 0 \dots (39)$$

$$-\phi_1 + (2 - \lambda)\phi_2 - \phi_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$-\phi_2 + (2 - \lambda)\phi_3 - \phi_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$-\phi_3 + (2 - \lambda)\phi_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

Dengan cara substitusi maka nilai mode shape $\phi_4, \phi_3, \phi_2, \phi_1$ didapat. Setelah nilai mode shape didapat maka dengan mudah nilai percepatan tanah, kecepatan tanah dan simpangan tanah diperoleh.

3.11. Percepatan, Kecepatan dan Simpangan Bangunan Bertingkat.

Untuk struktur berlapis empat seperti pada Gambar 4, maka mempunyai empat derajat kebebasan. Persamaan gerakan tersebut umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Setelah nilai mode shape didapat maka dengan mudah nilai percepatan tanah, kecepatan tanah dan simpangan tanah diperoleh, berdasarkan Persamaan 43.

$$\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_j \ddot{Z}_j + \{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_j \dot{Z}_j + \{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_j Z_j = -\{\phi\}_j^T [M] \{I\}_j \ddot{y}_t \quad \dots\dots\dots (43)$$

Jika,

$$M_j^* = \{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_j \ddot{Z}_j$$

$$C_j^* = \{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_j \dot{Z}_j$$

$$K_j^* = \{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_j Z_j$$

$$P_j^* = \{\phi\}_j^T [M] \{I\}_j \ddot{y}_t$$

maka Persamaan 43 dapat menjadi Persamaan 44.

$$M_j^* \ddot{Z}_j + C_j^* \dot{Z}_j + K_j^* Z_j = -P_j^* \ddot{y}_t \quad \dots\dots\dots (44)$$

Jika Persamaan 44 dibagi dengan M_j^* , dengan

$$\frac{C_j^*}{M_j^*} = 2.\xi.\omega_j, \quad \frac{K_j^*}{M_j^*} = \omega_j^2, \quad \text{dan} \quad \frac{P_j^*}{M_j^*} = \Gamma_j, \quad \dots\dots\dots (45)$$

maka dapat ditulis dalam bentuk differensial menjadi Persamaan 46.

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j \ddot{y}_t \quad \dots\dots\dots (46)$$

dengan :

$$Z = g * \Gamma_j \dots\dots\dots(47)$$

$$\dot{Z} = \dot{g} * \Gamma_j \dots\dots\dots(48)$$

$$\ddot{Z} = \ddot{g} * \Gamma_j \dots\dots\dots(49)$$

dengan :

Γ = partisipasi mode.

Dengan mensubstitusi Persamaan 47 s/d Persamaan 49 ke dalam Persamaan 46, maka dapat didapat Persamaan 50.

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2g_j = -\ddot{y}_t \dots\dots\dots(50)$$

Untuk menghitung besarnya \ddot{g}_j dapat digunakan metode *central difference*, sehingga diperoleh Persamaan 51.

$$\dot{g}_j = \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} \text{ dan } \ddot{g}_j = \frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} \dots\dots\dots(51)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan 51 ke dalam Persamaan 50 diperoleh Persamaan 52 yang dapat menghasilkan nilai g_{j+1} , yang dapat ditulis menjadi Persamaan 53.

$$\frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi_j\omega_j \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} + \omega_j^2g_j = -\ddot{y}_t \dots\dots\dots(52)$$

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right] g_{j+1} = -\ddot{y}_t \left[\omega_j^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right] g_j - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right] g_{j-1} \dots\dots\dots(53)$$

Persamaan 53 dapat ditulis menjadi Persamaan 54.

$$g_{j+1} = \frac{-\ddot{y}_t - ag_j - bg_{j-1}}{\hat{k}} \dots\dots\dots(54)$$

dengan,

$$a = \left[\omega_j^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right]$$

$$b = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right]$$

$$\hat{k} = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right]$$

Δt = step integrasi (dt).

ω = frekwensi sudut (rad/dt).

\ddot{y}_i = data rekaman gempa (percepatan tanah).

Dengan demikian diperoleh persamaan simpangan, kecepatan, dan percepatan yang ditulis berturut-turut menjadi Persamaan 55, Persamaan 56, dan Persamaan 57.

$$y = [\phi] * \{Z\} \dots\dots\dots(55)$$

$$\dot{y} = [\phi] * \{\dot{Z}\} \dots\dots\dots(56)$$

$$\ddot{y} = [\phi] * \{\ddot{Z}\} \dots\dots\dots(57)$$

dengan :

ϕ = mode shape.

y = simpangan tanah.

\dot{y} = kecepatan tanah

\ddot{y} = percepatan tanah.

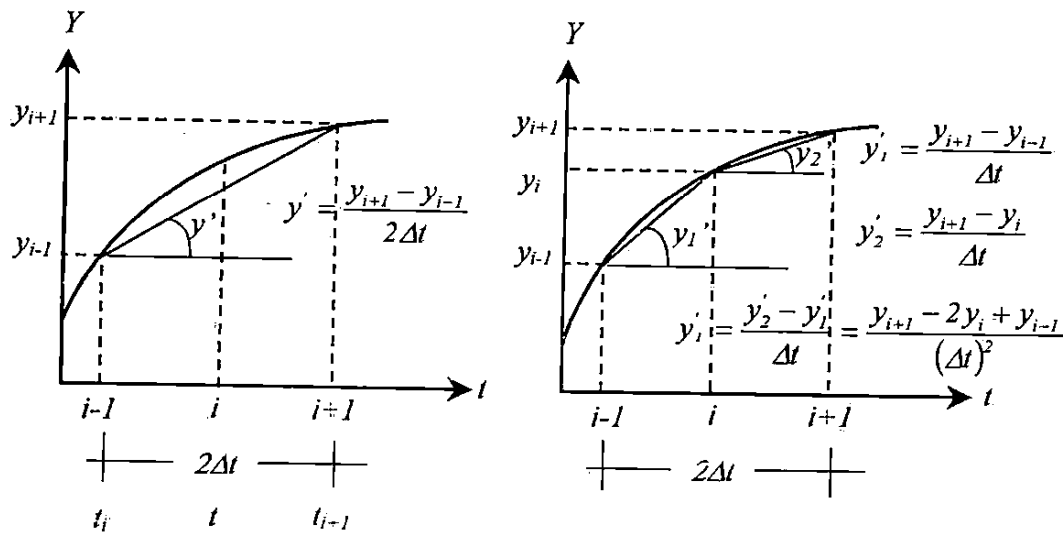
3.12. Integrasi Numerik dengan Metode Central Difference.

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematik dengan cara operasi hitungan (aritmatik). Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu diperlukan bantuan komputer untuk melaksanakan operasi tersebut.

Pada kondisi beban non-periodik yang sudah kompleks misalnya beban gempa maka respon struktur tidak mungkin lagi dihitung secara analitik, apalagi pada struktur tersebut memiliki derajat kebebasan banyak.

Persyaratan yang harus dipenuhi dalam proses integrasi numerik adalah harus stabil, sehingga kesalahan yang mungkin timbul diawal integrasi tidak *teramplifikasi* (menjadi besar atau bahkan sangat besar) pada akhir integrasi numerik. Salah satu metode yang tidak menimbulkan kesalahan amplifikasi (*unconditional stable*) yaitu metode β -Newmark. Sedangkan metode yang dapat menimbulkan kesalahan amplifikasi (*conditional stable*) pada akhir integrasi numerik adalah *Metode Linier Acceleration*,

menjadi *unconditional stable* apabila interval waktu Δt yang dipakai tidak lebih dari 0,1 dari periode getar struktur (Humar, 1990, dalam Widodo, 2001).



Gambar 3.4. Derivatif pertama dengan metode *central difference*.

Dengan mempertimbangkan adanya kemudahan dalam proses analisisnya maka di dalam penelitian ini metode yang dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial gerakan adalah metode *Central Difference* yang berdasar pada pendekatan nilai *derivatif* atas fungsi waktu, baik untuk parameter kecepatan maupun percepatan sebagaimana tampak pada Gambar 3.4. Kedua parameter tersebut kemudian dinyatakan dalam fungsi simpangan. Apabila diambil interval waktu Δt secara konstan selama waktu pembebanan, maka menurut prinsip *central difference*, kecepatan dan percepatan dapat dinyatakan dalam Persamaan 58 dan Persamaan 59.

$$\dot{y}_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \dots\dots\dots(58)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta t)^2} \dots\dots\dots(59)$$

Jika Persamaan 58 dan Persamaan 59 disubstitusi ke dalam Persamaan diferensial gerakan dengan derajat kebebasan tunggal yaitu Persamaan 60 maka akan diperoleh Persamaan diferensial 61.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\dot{y}_b \dots\dots\dots(60)$$

$$m\left(\frac{y_{i+1} - 2\Delta t + y_{i-1}}{(\Delta t)^2}\right) + c\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t}\right) + ky_i = -m\ddot{y}_{b,i} \dots\dots\dots(61)$$

Persamaan 61 mengandung nilai-nilai y_{i-1} , y_i dan y_{i+1} dan yang akan dihitung adalah nilai y_{i+1} . Agar nilai y_{i+1} dapat dihitung, maka nilai-nilai y_i dan y_{i-1} harus sudah diketahui. Untuk itu Persamaan 61 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 62.

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right]y_{i+1} = -m\ddot{y}_{b,i} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]y_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]y_{i-1} \dots\dots\dots(62)$$

Apabila persamaan 62 diambil suatu notasi $\hat{k} = \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right]$, $a = \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]$,

dan $b = \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]$ maka akan didapat Persamaan 63, serta dapat ditulis menjadi

Persamaan 64.

$$\hat{k}y_{i+1} = -m\ddot{y}_{b,i} - ay_i - by_{i-1} \dots\dots\dots(63)$$

$$y_{i+1} = \frac{-m\ddot{y}_{b,i} - ay_i - by_{i-1}}{\hat{k}} \dots\dots\dots(64)$$

Persamaan 64 memperlihatkan bahwa simpangan pada point $i+1$ dapat dihitung apabila simpangan pada point i , y_i dan point $i-1$, y_{i-1} sudah diketahui. Apabila proses integrasi numerik dimulai dari $i = 0$, maka simpangan prasyarat yang harus sudah ada adalah y_0 dan y_{-1} . Umumnya terdapat suatu kondisi awal y_0 dan \dot{y}_0 yaitu simpangan dan kecepatan saat $t = 0$, atau dalam perkataan lain y_0 dan \dot{y}_0 sudah diketahui. Dengan demikian tinggal mencari besarnya y_{-1} . Untuk itu pembahasan kembali pada Persamaan 58 dan Persamaan 59 dengan indeks $i = 0$ menjadi Persamaan 65 dan Persamaan 66.

$$\dot{y}_i = \frac{y_i - y_{-1}}{2\Delta t} \dots\dots\dots(65)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{y_i - 2y_0 + y_{-1}}{(\Delta t)^2} \dots\dots\dots(66)$$

Nilai y_1 yang diperoleh dari Persamaan 65 yang disubstitusi ke Persamaan 66, sehingga diperoleh Persamaan 67 dan Persamaan 68.

$$2\Delta t\ddot{y}_0 + \dot{y}_0 = -2y_0 + y_{-1} \dots\dots\dots(67)$$

$$y_{-1} = y_0 - \Delta t \dot{y}_0 + (\Delta t)^2 \ddot{y}_0 \dots\dots\dots(68)$$

Untuk mencari besarnya y_{-1} menurut Persamaan 67 dan Persamaan 68, maka tinggal besarnya \ddot{y}_0 yang belum diketahui. Untuk itu dengan mengambil persamaan diferensial gerakan saat $t = 0$, yang ditulis dalam Persamaan 69 didapat Persamaan 70.

$$m\ddot{y}_0 + c\dot{y}_0 + ky_0 = -m\ddot{y}_{b,0} \dots\dots\dots(69)$$

$$\ddot{y}_0 = \frac{-\ddot{y}_{b,0} - c\dot{y}_0 - ky_0}{m} \dots\dots\dots(70)$$

3.13. Dasar Analisis Untuk Tanah Non Linier Elastis.

Pada awal integrasi $G = G_{max}$ maka didapat simpangan awal y_0 , sehingga nilai regangan geser tanah yang terjadi akibat gempa dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan 71 (Das, 1993).

$$\gamma = \frac{\Delta y}{2h} \dots\dots\dots(71)$$

dimana : γ = regangan geser tanah.

Δy = simpangan antara lapisan tanah.

$2h$ = tebal lapisan tanah.

Dengan memasukan hasil regangan geser dari persamaan 71 ke dalam Persamaan 16 maka akan didapat G/G_{max} yang baru sehingga modulus geser G yang baru dapat diperoleh, dengan demikian K (kekakuan) yang baru pun di dapat. Berdasarkan K yang baru tersebut kecepatan, percepatan dan simpangan tanah non linier elastis dapat