

Persamaan Poisson dan Laplace

Dr. Ramadoni Syahputra

Jurusan Teknik Elektro FT UMY

Metode untuk mendapatkan persamaan Poisson sangatlah sederhana, dari bentuk titik hukum Gauss kita peroleh:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

dari definisi: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

dan hubungan gradien: $\mathbf{E} = -\nabla V$

dengan substitusi kita dapatkan

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_v$$

atau,

$$\nabla \cdot \nabla V = - \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

berlaku untuk daerah serbasama
dengan ϵ tetap.

*Dalam koordinat kartesian,
persamaan Poisson:*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Biasanya operasi $\nabla \cdot \nabla$ disingkat menjadi ∇^2 (dibaca "del kuadrat"), dan kita peroleh:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Jika $\rho_v = 0$, yang menunjukkan bahwa kerapatan muatan ruang sama dengan nol, tetapi membiarkan muatan titik, muatan garis, dan kerapatan muatan permukaan terdapat pada perbatasan sebagai sumber medan, maka:

$$\nabla^2 V = 0$$

yang merupakan persamaan Laplace.

Operasi ∇^2 disebut Laplacian dari V .

Dalam koordinat kartesian bentuk persamaan Laplace adalah:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

*Laplacian dalam koordinat tabung
dan koordinat bola:*

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \dots$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$



thank's
thank's