Analisis Vektor

Ramadoni Syahputra
Jurusan Teknik Elektro FT UMY

Analisis Vektor

Analisis vektor meliputi bidang matematika dan fisika sekaligus dalam pembahasannya

Skalar dan Vektor

Skalar

- Skalar ialah besaran yang hanya mempunyai besar (magnitudo). Skalar dapat dinyatakan dengan sebuah bilangan nyata
- Contoh besaran skalar lainnya ialah massa, kerapatan, tekanan, dan volume.

Vektor

- Vektor merupakan besaran yang mempunyai besar (magnitudo) dan arah dalam ruang.
- Contoh besaran vektor adalah gaya, kecepatan, percepatan, intensitas medan elektrik, dan intensitas medan magnetik.

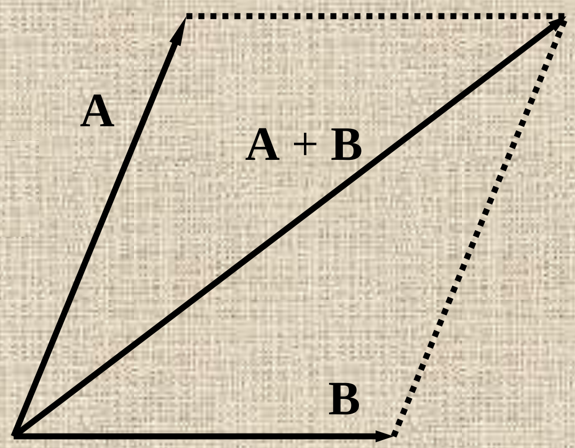
ALJABAR VEKTOR

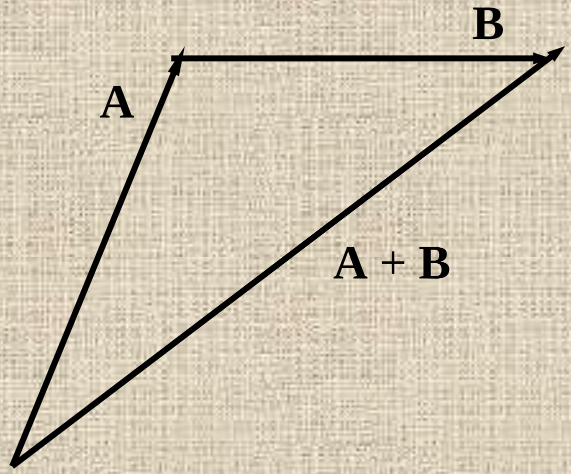
VEKTOR DALAM PENJUMLAHAN DILAKUKAN SECARA VEKTORIS, TIDAK SECARA ALJABAR.

Penjumlahan vektor mengikuti hukum jajaran genjang (***PARALLELOGRAM LAW)*** dan dapat diselesaikan secara grafik.

Gambar berikut menunjukkan penjumlahan dua vektor, yaitu vektor **A** dan **B**.

Dapat dilihat bahwa **A + B = B + A**, yaitu memenuhi hukum *commutative*.





Penjumlahan vektor memenuhi hukum asosiatif (associative law):

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Vektor dapat dikalikan dengan sebuah skalar, besar vektor tersebut berubah tetapi arahnya tetap jika skalar tersebut positif. Vektor akan berbalik arahnya jika dikalikan dengan skalar negatif. Perkalian vektor dengan skalar mengikuti hukum asosiatif dan distributif:

$$\boxed{\begin{aligned}(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B}\end{aligned}}$$

Dua vektor disebut sama jika selisihnya adalah nol, atau **A = B if A – B = 0.**

PERKALIAN TITIK

Tinjaulah dua vektor **A** dan **B**, hasil perkalian skalarnya atau perkalian titiknya didefinisikan sebagai perkalian dari besar **A** dan besar **B**, dikalikan dengan kosinus sudut antara kedua vektor tersebut (ambil sudut terkecil antara **A** dan **B**):

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}}$$

Perkalian titik atau perkalian skalar juga merupakan skalar, seperti dinyatakan oleh salah satu namanya, dan mengikuti hukum komutatif,

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}$$

karena tanda sudutnya tidak mempengaruhi suku kosinus.

Pernyataan **A . B** dibaca **"A dot B".**

Definisi perkalian titik biasanya tidak digunakan dalam bentuk dasarnya.

Tinjau dua vektor yang komponennya dalam koordinat kartesian diketahui, misalnya:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k} \quad \text{and}$$

$$\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}$$

Perkalian titik memenuhi hukum distributif, jadi **A . B** menghasilkan jumlah dari sembilan skalar, masing-masing mengandung perkalian titik dua vektor satuan.

Karena sudut antara dua vektor satuan yang berbeda dalam sistem koordinat kartesian adalah 90°, maka:

$$\mathbf{i} \cdot \mathrm{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{k} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{i}$$

$$= \mathbf{j} \cdot \mathrm{k} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{j} = 0$$

Tiga suku lainnya mengandung perkalian titik vektor satuan dengan dirinya sendiri, sehingga hasilnya ialah satuan. Jadi perkalian titik dua vektor dapat dituliskan:

$$A.B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

tanpa menyatakan bentuk sudutnya.

Perkalian titik antara vektor dengan dirinya sendiri menghasilkan kuadrat dari besar vektor tersebut, atau

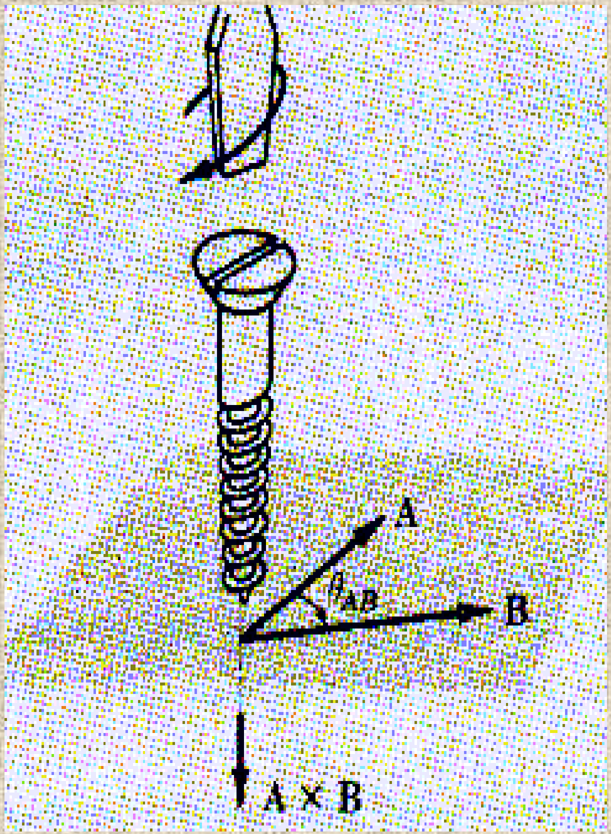
$$A \, . \, A = A^2 = |A|^2$$

PERKALIAN SILANG

- Perkalian silang vektor **A** dan **B** dituliskan dengan tanda silang antara kedua vektor tersebut, **A** x **B**, dan biasanya dibaca "**A** silang **B**" atau "**A** *cross* **B**".

- Perkalian silang **A** x **B** merupakan sebuah vektor. Besar **A** x **B** sama dengan besar **A** dikalikan dengan besar **B** dan kemudian dikalikan dengan sinus sudut terkecil antara **A** dan **B**.

Arah **A** x **B** tegak lurus pada bidang datar tempat **A** dan **B** terletak, dan arahnya sesuai dengan arah maju sekrup putar kanan yang diputar dari **A** ke **B**.



Sebagai suatu persamaan:

$$\mathbf{A \times B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta_{AB}$$

Membalik urutan vektor **A** dan **B** menghasilkan vektor satuan yang berlawanan arahnya dengan semula, sehingga perkaliannya tidak komutatif karena:

$$\mathbf{B \times A} = -(\mathbf{A \times B})$$

Arah* A x B *merupakan arah perputaran sekrup, dari A diputar ke B

- Jika definisi perkalian silang dikenakan pada vektor satuan $\mathbf{a}_x$ dan $\mathbf{a}_y$ maka didapatkan $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, karena masing-masing vektor besarnya satu dan arahnya saling tegak lurus dan perputaran $\mathbf{a}_x$ ke $\mathbf{a}_y$ menghasilkan arah sumbu z positif, sesuai dengan definisi sistem koordinat putar kanan. Dengan cara yang serupa didapatkan $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$, dan $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$.
- Mencari perkalian silang dapat dilakukan dengan lebih mudah menguraikan perkalian silang dari dua vektor **A** dan **B** sebagai jumlah dari sembilan perkalian silang sederhana yang mengandung dua vektor satuan.

$$\mathbf{A \times B} = A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z$$
$$+ A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z$$
$$+ A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z$$

Kita peroleh

$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$, dan $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$,
dan memenuhi

$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$, dan
$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$.

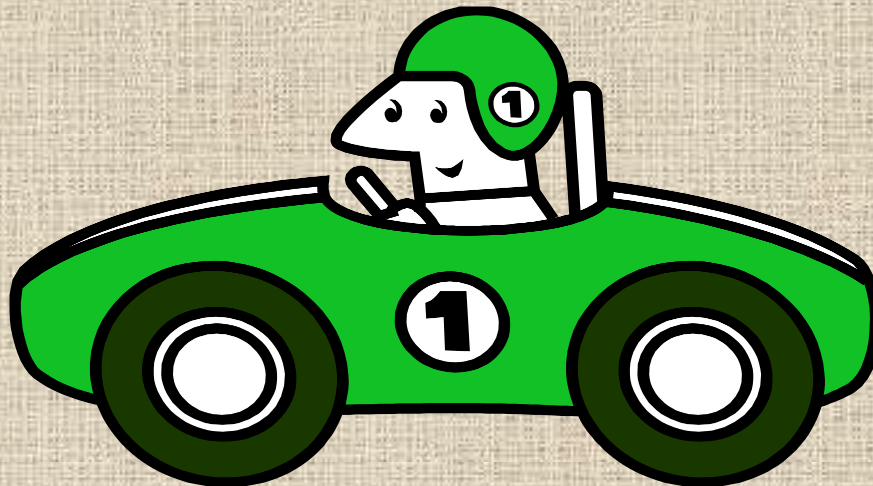
Ketiga suku lainnya sama dengan nol, karena perkalian silang antaar vektor dengan dirinya ialah nol karena sudut diantaranya nol.

Hasilnya dapat digabungkan untuk mendapatkan

$$\mathbf{A \times B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{a}_z$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk determinan yang mudah diingat yaitu,

$$\mathbf{A \times B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$



Thank´s

Thank´s

Thank's